LIBRIS We know books

Probleme și Teste Grilă de Matematică pentru
Admiterea la Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea Babeș-Bolyai
2025

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY
TRADITIO ET EXCELLENTIA

Cuprins

1

Algebră

Aritmetică și Divizibilitate

1. Notăm cu A mulţimea numerelor naturale n care au ultima cifră 6 şi au proprietatea că dacă mutăm această cifră în faţa numărului, obţinem un număr de 4 ori mai mare. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Dacă $n \in A$, atunci $3 \mid n$;
- B Există $n \in A$ astfel încât $12 \mid n$;
- C Există $n \in A$ care are 8 cifre;
- D Există $n \in A$ care are toate cifrele diferite două câte două.

2. Câte numere naturale n nu au proprietatea că $\sqrt{2n^3 + 13n + 2} \in \mathbb{N}$?

A 5; B o infinitate; C nici unul; D 1.

3. Pentru câte valori ale lui $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ numărul a_n este pătrat perfect, unde $a_n = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + ... + \left(\frac{(n-1)n}{2} + 1\right)\left(\frac{(n-1)n}{2} + 2\right) ... \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$?

- A pentru nici una;
- B pentru o valoare;
- C pentru două valori;
- D pentru o infinitate de valori.

4. Dacă $x = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} + \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{2\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$, atunci x^2 are valoarea:

A $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$; B $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$; C $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$; D $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

5. Fie a_n o progresie aritmetică cu rația $r \neq 0$ și $a_1 = 1$. Pentru $\forall n \geq 1$ expresia $C = \frac{a_{2n} + a_{2n-1} + ... + a_{n+1}}{a_n + a_{n-1} + ... + a_1}$ rămâne constantă. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $a_{31} = 63$;

B $a_{15} = 29$;

C Rația este egală cu valoarea raportului;

D $C = 3$.

6. Câte numere întregi pozitive de patru cifre există care conțin blocul 25 și sunt divizibile cu 75? (2250 și 2025 sunt două astfel de numere).

A 62; B 31; C 34; D 63.

7. Fie trei numere întregi pozitive a, b și c astfel încât $21a = 9b = 7c$ și $a + 8, b$ și c sunt o progresie aritmetică. Care sunt aceste valori a, b, c ?

A $a = 21, b = 49, c = 81$;

B $a = 12, b = 28, c = 36$;

C $a = 42, b = 105, c = 126$;

D $a = 6, b = 14, c = 18$.

8. Dacă n este un multiplu de 5 și $n = p^2 \cdot q$, unde p și q sunt numere prime, care dintre următoarele este cu siguranță multiplu de 25?

A p^2; B q^2; C pq; D p^2q^2.

9. Fie p un număr prim mai mare decât 3. Care dintre următoarele afirmații este adevărată pentru $p^2 - 1$?

A Expresia este divizibilă cu 12, dar nu și cu 24;

B Expresia este divizibilă cu 18, dar nu și cu 24;

C Expresia este divizibilă cu 24;

D Expresia este divizibilă cu 36, dar nu și cu 24.

10. În care dintre următoarele situații n divide $2^n - 2$?

A n este un număr prim;

B n este un număr impar;

C n este o putere a lui 2;

D n este o putere a lui 2 sau un număr prim.

11. Fie progresia aritmetică $a_1, a_2, \ldots a_n$ cu rația r. Știind că $a_1 = 1$ și $a_{25} = 121$, câte pătrate perfecte sunt în progresie?

A 3; B 4; C 5; D 6.

12. Fie o progresie aritmetică unde al cincilea termen este de trei ori mai mare decât al doilea, iar al nouălea este mai mare decât al treilea cu 24. Care este primul termen și rația progresiei?

A $a_1 = 1$ și $r = 4$; B $a_1 = 2$ și $r = 3$; C $a_1 = 3$ și $r = 2$; D $a_1 = 2$ și $r = 4$.

13. Două progresii aritmetice sunt definite ca $a_n = 3n + 7$ și $b_m = 5m + 2$. Care este cea mai mică valoare a lui k pentru care $a_k \in b_m$?

A $k = 8$; B $k = 6$; C $k = 5$; D $k = 9$.

Combinatorică

14. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. În planul xOy considerăm o mulţime $\mathcal{M}$ formată din n puncte distincte diferite de O. Numărul tuturor triunghiurilor $\triangle AOB$ cu $A, B \in \mathcal{M}$ este:

A A_n^2; B 2^n; C C_{n+1}^3; D cel mult C_n^2.

15. Fie M o mulțime cu n elemente. În câte moduri posibile putem alege trei submulțimi disjuncte $A, B, C \subseteq M$?

A $3n!$; B 3^n; C 4^n; D C_n^3.

16. Mulţimea numerelor n care verifică inegalitatea $C_{n-1}^5 + C_{n-1}^4 < C_n^{n-3}$ este:

A $(-1, 8)$; B $\{3, 4, 5, 6, 7\}$; C $\{6, 7\}$; D $[8, \infty) \cap \mathbb{N}$.

17. Notăm cu $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor cu domeniul $\{0, 1, 2, 3\}$ şi codomeniul $\{1, 2, 3, 4\}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Mulţimea $\mathcal{F}$ conţine 4^3 funcţii;

B Mulţimea $\mathcal{F}$ conţine 4 funcţii strict monotone;

C Mulţimea $\mathcal{F}$ conţine 4 funcţii injective;

D Probabilitatea ca o funcţie f aleasă aleator din mulţimea $\mathcal{F}$ să verifice $f(0) = f(1) = 1$ este $\frac{1}{16}$.

18. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $x = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\left(C_{n+1}^{k+1}\right)^4}{C_n^k C_n^{k+1}}$, atunci:

A $x \geq 16\left(C_{2n}^n - 1\right)$;

B $x < 16\left(C_{2n}^n - 1\right)$;

C $x = 16 C_{2n}^n$;

D $x \geq 16 C_{2n}^n - 17$.

19. Câte funcții $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{0, 1\}$ au proprietatea că $\sum\limits_{k=1}^{n} f(n) = 3$?

A C_n^2;

B C_n^3;

C $A_n^2 \cdot \frac{1}{2}$;

D 120, când $n = 10$.

20. Considerând mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, care este numărul funcțiilor $f : A \to B$ strict descrescătoare? Dar numărul funcțiilor $f : B \to A$ crescătoare?

A C_6^4, A_9^3;

B C_6^4, C_{10}^4;

C A_6^4, C_9^3;

D C_6^4, C_9^3.

21. Suma $1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n$ este egală cu:

A $n \cdot 2^{n-1}$;

B $2^{n-1}(n+2)$;

C $2^n(n+2)$;

D $\sum_{k=0}^{n} C_n^k + n \cdot 2^{n-1}$.

22. Suma $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$ este egală cu:

A $\frac{2^n - 1}{(n+1)!}$;

B $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$;

C $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_n^k$;

D $\frac{2^{n-1} - 1}{n+1}$.

23. Fie dezvoltarea $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^n$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Dacă $n = 15$, dezvoltarea are exact 3 termeni raționali;

B Dacă $n = 24$, dezvoltarea are exact 5 termeni iraționali;

C Dacă $n = 30$, termenul corespunzător pentru $k = 18$ este irațional;

D Dacă $n = 18$, termenul corespunzător pentru $k = 9$ este irațional.

24. Pe dreptele $d_1 || d_2$ se consideră punctele distincte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, $A_6 \in d_1$ şi B_1, B_2, B_3, B_4, $B_5 \in d_2$. Numărul triunghiurilor care se pot forma cu aceste puncte este:

A 120;

B 124;

C 135;

D 140.

Funcții logaritmice și exponențiale

25. Fie x și y, numere reale pozitive, $x, y > 1$, astfel încât $\log_x(y^x) = \log_y(x^{ey}) = 2\sqrt{\pi}$. Să se indice care dintre următoarele variante reprezintă valoarea lui $x \cdot y$.

A $\frac{\pi^2}{e}$;

B $\frac{4\pi}{e}$;

C $\frac{\pi}{e}$;

D $\frac{2\sqrt{\pi}}{e}$.

26. Fie $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x - 6$. Aici $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiție al lui f. Atunci:

A $\mathbb{E}$ este un interval deschis;

B ecuația $f(x) = 0$ are o singură soluție;

C există un șir nemărginit $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $f(x_n) > 0$;

D există un șir nemărginit $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $f(x_n) < 0$.

27. Dacă $\log_{12} 27 = a$, atunci valoarea lui $\log_6 16$ este:

A $\frac{4}{a}$; B $\frac{4(3-a)}{3+a}$; C $\frac{4+a}{4-a}$; D $\frac{4(3+a)}{3-a}$.

28. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n > 1$. Dacă $L = \log_{a_1^n} a_2 + \log_{a_2^n} a_3 + \ldots + \log_{a_{n-1}^n} a_n + \log_{a_n^n} a_1$, atunci:

A $L \geq 1$; B $L > 1$; C $L < 1$; D $L = 1$.

29. Fie ecuația $(\sqrt{x} - 2)^3 + \ln x = 0$ și $I = [1, 4]$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Există cel puțin o soluție a ecuației pe intervalul I;

B Nu există nicio soluție pe intervalul I;

C Există cel puțin o soluție pe intervalul $(1, 4]$;

D Funcția $f(x) = (\sqrt{x} - 2)^3 + \ln x$ nu este definită pentru $x = 0$, deci nu există nicio soluție pe intervalul dat.

30. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, x < 1 \\ 4 - \log_{\sqrt[4]{2}}(x), x \geq 1 \end{cases}$. Pentru ce valori ale lui c ecuația $f(x) = c$ are exact 2 soluții?

A $c = 2$; B $c = 1$; C $c = 3$; D $\forall c < 2$.

31. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_3 x + \log_9 x^2 + \log_{27} x^3 + \ldots + \log_{3^n} x^n = n$, atunci:

A $S \subseteq [0, 1)$;

B $S \subseteq [1, 3)$;

C S are exact 1 element;

D S are exact 3 elemente.

32. Fie sistemul

$$\begin{cases} 4^{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}} = 32 \\ \log_9(x-y) + \log_9(x+y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Care dintre următoarele perechi (x, y) sunt soluții ale sistemului?

A $(2,1)$; B $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; C $(-2,-1)$; D Altă soluție.

33. Valoarea lui n care satisface ecuația $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_n(n+1) = 10$ este

A 1024; B 1023; C 2047; D 512.

34. Valoarea lui x care satisface ecuația $3 + e^{2x} = 7e^{2x}$ este

A $-\ln\frac{1}{2}$; B $\ln\frac{1}{2}$; C $\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$; D $-\frac{1}{2}\ln 2$.

35. Se dă ecuația $S := \log\left(\log_{10^a}\left(\log_{10^b}\left(10^{1000}\right)\right)\right) = 0, \quad a,b \in \mathbb{Z}^*, a,b > 0$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt corecte, știind că M reprezintă mulțimea perechilor unice $\{a,b\}, a \neq b$ astfel încât $S = 0$.

A card $M = 4$;

B $\prod_{k=1}^{\text{card } M} a_k \cdot b_k = 0$;

C $\sum_{k=1}^{\text{card } M} a_k \cdot b_k = 123$;

D $\sum_{k=1}^{\text{card } M} \left(\prod_{k=1}^{\text{card } M} a_k + \prod_{k=1}^{\text{card } M} b_k\right) + 6$ este un pătrat perfect.

Ecuații și inecuații

36. Fie $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy + x + y = 11 \text{ și } xy(x+y) = 30\}$, atunci:

A $x + y = 5$ sau $xy = 5$ pentru fiecare $(x,y) \in S$;

B S are 2 elemente;

C $x + y = 6$ sau $xy = 6$ pentru fiecare $(x,y) \in S$;

D $S = \emptyset$.

37. Numărul de soluții reale ale ecuației $\sqrt{3-x} - x = 0$ este:

A 0; B 1; C 2; D 3.

38. Fie S o submulțime a lui $\mathbb{Z}_+$ astfel încât:

(a) $2 \in S$

(b) $n \in S \Leftarrow n^2 \in S$

(c) $(n+5)^2 \in S \Leftarrow n \in S$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $-5 \notin S$;

B Numerele întregi, diferite de 1 și care nu sunt multiplii de 5 aparțin lui S;

C $S = \{1\} \cup \{5n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$;

D $S = \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\} \cup \{5n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

39. Numărul de soluții reale ale ecuației $\left(x^2 - 7x + 11\right)^{x^2-13x+42} = 1$ este:

A 4; B 2; C 6; D 8.

40. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică descrescătoare care verifică relațiile $-a_7a_9a_{11} = 101 \cdot 129 + 8$ și $a_3 + a_4 + a_5 = -6$. Care dintre următoarele afirmații sunt false?

A $a_1 = 5$;

B $a_4^3 = -8$;

C Suma primelor 10 elemente este -70;

D Rația progresiei este 3.

41. Suma soluțiilor ecuației $\sqrt[4]{x} = \dfrac{12}{7 - \sqrt[4]{x}}$ este:

A $S < 2^9$; B $S \in [2^8, 2^9]$; C $S \in (3^5, 2^8)$; D $S \notin (2^7, 7^3)$.

42. Valoarea minimă a expresiei $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k + k|$, unde $\forall x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, n = 2m+1, m \in \mathbb{N}^*$ și $x_{k+1} = x_k + 1$ este:

A $\dfrac{n^2+2n}{2}$;

B $1011 \cdot 1012$, pentru $n = 2023$;

C $\dfrac{n^2+2n}{4}$;

D $2023 \cdot 1012$, pentru $n = 2023$.

43. Știind că, prin $[x]$ și $\{x\}$ înțelegem partea întreagă și partea fracționară a numărului real x, ecuația $x^2 + 2[x]\{x\} + 3\{x\}^2 = 4$ are, pe mulțimea numerelor reale:

A 3 soluții;

B 4 soluții;

C 3 soluții întregi;

D 4 soluții întregi.

44. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ fixate. Notăm cu S_1 mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $ax + b = 0$, iar cu S_2 mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $ax + b \leq 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Pentru $a = 1$ și $b = -5$ avem că $S_1 = 5$ și $S_2 = (-\infty, 5)$;

B Pentru $a = 0$ și $b = -5$ avem că $S_1 = -5, 0$ și $S_2 = \mathbb{R}$;

C Pentru $a = -5$ și $b = -5$ avem că $S_1 = -1$ și $S_2 = (-1, +\infty)$;

D Pentru $a = 0$ și $b = 0$ avem că $S_1 = \mathbb{R}$ și $S_2 = \mathbb{R}$.

45. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru fixat. Notăm cu S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - |x| = mx(x+1)$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A S are cel puțin două elemente pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$;

B Există un interval nevid $I \subset \mathbb{R}$ a.î. $S \cap (0, \infty) \neq 0$ pentru fiecare $m \in I$;

C Există un $m \in \mathbb{R}$ a.î. S este un interval nevid;

D Există un $m \in \mathbb{R}$ a.î. S este reuniunea a două intervale nevide disjuncte.

46. Fie $E \subset \mathbb{R}$ domeniul de existență al expresiei $\frac{x+1}{x^2-3x+5}$, iar $S \subset \mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor inecuației $\frac{x+1}{x^2-3x+5} \leq 1$. Atunci:

A $E = \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$ și $S = (-\infty, 3)$;

B $E = S$;

C $S = \mathbb{R}$;

D $S \setminus E \neq \emptyset$.

47. Fie $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy + x + y = 4 \text{ și } xy(x+y) = 4\}$, atunci:

A S are 2 elemente;

B $(0, 4) \in S$;

C $(1+i, 1-i) \in S$;

D $S = \emptyset$.

48. Produsul soluțiilor reale ale ecuației $x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$ este:

A 360;

B alt răspuns;

C $6!$;

D $4! \cdot 15$.

49. Fie $x, y, z \in R, x, y, z > 0$ astfel încât $xyz = 1$ și $x + \frac{1}{z} = 3$, $y + \frac{1}{x} = 27$. Să se indice care dintre următoarele variante de răspuns reprezintă valoarea lui $y + \frac{1}{z}$.

A $\frac{160}{7}$;

B $\frac{96}{4}$;

C $\frac{20}{7}$;

D $\frac{180}{7}$.

50. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru fixat. Notăm cu S mulțimea soluțiilor ecuației $\sqrt{2|x| - 2x} = m - x$. Atunci:

A $m \in S$ pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$;

B $m - 2 + 2\sqrt{1-m} \in S$ pentru fiecare $m \in (-\infty, 0)$;

C există un interval nevid, deschis, $I \subset \mathbb{R}$ astfel încât S are un singur element pentru orice $m \in I$;

D există un interval nevid, deschis, $J \subset \mathbb{R}$ astfel încât S are trei elemente pentru orice $m \in J$.

51. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $x \leq \frac{8}{x^2}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

A f și f^{-1} sunt strict crescătoare, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(y) = \sqrt[3]{y}$;

B $(-\infty, 0) \subset S$;

C $S = \{x \in \mathbb{R} | x^3 \leq 8\}$;

D S este reuniunea a două intervale nevide disjuncte.

52. Fie $a \in \mathbb{R}$ un parametru fixat și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = a$. Atunci:

A S are 3 elemente pentru $a = 0$;

B f este strict crescătoare;

C S are cel mult un element;

D S are cel puțin un element.

53. Fie $n \in \mathbb{R}$ un parametru fixat. Ecuația $\sqrt{3 - x} - x = a$ are cel puțin o soluție reală dacă:

A $a \in (-\infty, -10)$;

B $a \in \{-10, -9, -8\}$;

C $a \in \{-3, -2, -1, 0\}$;

D $a \in \{8, 9, 10\}$.

54. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

A $S = [3, 12]$;

B $S = [1, \infty)$;

C $S = [5, 10]$;

D $S = \{4, 11\}$.

55. Notăm cu $T = \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{k^2 + k}$, $T \in \mathbb{R}$. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat prin termenul general $x_n = \left[T + \frac{n}{2024}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $T \in \mathbb{N}$;

B $\sum_{i=1}^{2024} x_i = 2023$;

C $x_1 + x_2 + x_3 = 3$;

D $\sum_{i=1}^{2023} x_i = 2024$.

56. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de n numere reale, cu n număr natural par. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Dacă $a_n > 0$ pentru orice n, atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq 2n$;

B Dacă $a_1, a_2 > 0$ și $a_1 a_2 = 3$, atunci $a_1 + a_2 \geq 3$;

C Dacă $(a_n)_{n \geq 5}$ sunt rădăcinile polinomului $f = x^n - nx^{n-1} + 2024x^3 + nx - 1$, atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 2n$;

D Dacă $(a_n)_{n\geq 5}$ sunt rădăcinile polinomului $f = x^n - nx^{n-1} + 2024x^3 + nx - 1$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 0$.

57. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^{\log_7 10} + 8^{\log_7 x} + 10 \cdot x^{\log_7 9} \leq 11^{1+\log_7 x} + x^{\log_7 11}$ este mulţimea:

A $(0, +\infty)$; B $[1, +\infty)$; C $\{1\}$; D $[1, 10]$.

58. Soluţiile ecuaţiei $5^{2x} + 3x5^x + 2x^2 + 6 = 7 \cdot 5^x + 13x,\ x \in \mathbb{R}$, aparţin mulţimii:

A $[0, 1]$; B $[-1, 4]$; C $(-2, 0]$; D $\{0,\ 1,\ 2\}$.

59. Soluţiile ecuaţiei $x^{\log_7 10} + 8^{\log_7 x} + 2 \cdot x^{\log_7 9} = 4 \cdot x^{\log_7 12}$ aparţin mulţimii:

A $(0, 5)$; B $(0, 4]$; C $[1, 2)$; D $[2, 5)$.

60. Soluţiile ecuaţiei $40^x+18^x+3\cdot 15^x+4\cdot 12^x+3\cdot 8^x = 30^x+24^x+3\cdot 20^x+16^x+3\cdot 9^x+3\cdot 6^x$ aparţin mulţimii:

A $[0, \log_2 3]$; B $[-1, 1]$; C $[0, 2)$; D $[0, \log_4 9]$.

61. Fie funcţia $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (x + 1)^{2024}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt **false**?

A $2f(6)$ este pătrat perfect al unui număr natural;

B $f(x) < 2024x + 1,\ \forall x \in [-1, \infty)$;

C $f(x) \geq 2024x + 1,\ \forall x \in [-1, \infty)$;

D după ridicarea la putere $f(x)$ are exact 2 termeni care **nu** depind de x.

62. Câte triplete (x, y, z) de numere naturale nenule verifică ecuaţia $2xyz + 2xy - xz - 2yz - x - 2y + z = 5$?

A 2; B 4; C 10; D nici unul.

63. Dacă $n \geq 2$ este un număr natural fixat, atunci ecuaţia $(1 + 2^x)\left(1 + 2^{-x}\right) + \cdots + (n + (n+1)^x)\left(n + (n + 1)^{-x}\right) = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n}{6}$, $x \in \mathbb{R}$, are soluţiile în mulţimea:

A $[0, +\infty)$; B $[-1, 1]$; C $[1, 3)$; D $(-5, 4]$.

64. Se consideră șirurile de numere reale (a_n) și (b_n), $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sqrt{3}$ și $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 3$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$;

B $(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) < (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$;

C $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq 1$;

D $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} < 1$.

65. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2-6} = x^2 - 8$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A ecuaţia are exact 4 soluţii;

B ecuaţia nu are soluţii;

C ecuaţia are exact două soluţii;

D suma soluţiilor este 0.

66. Se consideră ecuaţiile: $(7-4\sqrt{3})^x - 2\cdot(2-\sqrt{3})^x = 3$, $(3-2\sqrt{2})^y - 2\cdot(\sqrt{2}-1)^y = 3$. Ştiind că x şi y sunt soluţiile celor două ecuaţii, atunci:

A $x + y = \ln 3 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(2-\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2}-1)\cdot\ln(2-\sqrt{3})}\right]$;

B $x + y = \ln 2 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(2+\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2}+1)\cdot\ln(2+\sqrt{3})}\right]$;

C $x - y = \ln 3 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2}-1) - \ln(2-\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2}-1)\cdot\ln(2-\sqrt{3})}\right]$;

D $x - y = \ln 2 \cdot \left[\frac{\ln(\sqrt{2}+1) - \ln(2+\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2}+1)\cdot\ln(2+\sqrt{3})}\right]$.

67. Suma elementelor mulţimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \left[\frac{x+1}{2}\right] = 3\right\}$ este:

A 2;

B 10;

C 9;

D 11.

Numere Complexe

68. Considerăm z un număr complex. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $z^2 < 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$;

B $z^2 \in \mathbb{R}$ şi $z^2 \geq 0$ dacă şi numai dacă $z \in \mathbb{R}$;

C $z^2 \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă partea imaginară a lui z este 0 sau partea reală a lui z este 0;

D $z^2 \geq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

69. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca numărul complex $(a+bi)^n - (ai+b)^n$ să fie real pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$;

B $n = 2k + 4,\ k \in \mathbb{N}$;

C $n = 4k,\ k \in \mathbb{N}^*$;

D $n = 4k + 2,\ k \in \mathbb{N}$.

70. Să presupunem că există numere complexe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ diferite de zero, astfel încât z satisface ecuațiile $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ și $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$. În acest caz, toate valorile posibile (complexe) ale lui z sunt:

A $\{i, -i\}$;

B $\{1, -1\}$;

C $\{1, i, -1\}$;

D $\{1, i, -1, -i\}$.

71. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Numerele complexe z având modulul 1, pentru care $50z^{2017}\left(z^2 + 1\right) = z^{98} + 1$, aparţin mulţimii:

A $\{i,\ -i,\ 0\}$;

B $\{-1,\ 1,\ i,\ -i\}$;

C $\{1,\ -i\}$;

D $\{\cos\pi + i\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2} + i\cos\pi\}$.

72. Fie ecuația $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^3 + \left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^2 + \left(\frac{1-iz}{1+iz}\right) + 1 = 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Ecuația are 4 soluții;

B Ecuația are 2 soluții reale;

C Ecuația nu are soluții;

D Produsul soluțiilor ecuației este -1.

73. Fie z un număr complex de modul 1 astfel încât $|z^2 + \overline{z}^2| = 2$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Ecuația are 4 soluții;

B Ecuația are 2 soluții reale;

C Ecuația nu are soluții;

D Suma soluțiilor ecuației este 0.

74. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$, număr prim și $z_n = i^1 + i^2 + \cdots + i^n$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Există n prim a.î. $\operatorname{Re} z_n = \operatorname{Im} z_n = 0$;

B Există n prim a.î. $\operatorname{Re} z_n = 0$;

C Există n prim a.î. $\operatorname{Im} z_n = 0$;

D $\operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n \in \{-1, 1\}$ pentru orice n prim.

75. Fie $z_1 = 0, z_2 = a > 0, z_3$ afixele vârfurilor unui triunghi echilateral și z_0 afixul centrului de greutate al triunghiului. Dacă $z_0 \neq 0$, atunci expresia $\frac{(z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2}{(z_0)^2}$ este egală cu: